ALCUNE PROPOSIZIONI

SULLA

SUPERFICIE CONOIDE

AVENTE PER DIRETTRICI DUE RETTE

DEL PROFESSORE

GIUSEPPE BRUNO

---

1. Considerisi il conoide S che ha per direttrici due rette, e suppongasi noto che

a) Questa superficie ha due sistemi di generatrici rettilinee, a ciascuno dei quali corrisponde un piano direttore della superficie, al quale piano sono parallele tutte le generatrici del sistema stesso;

b) Due generatrici della superficie non sono mai in uno stesso piano quando appartengono ad un medesimo sistema: se invece esse sono di sistema differente si incontrano sempre. Per ogni punto della superficie passano due generatrici rettilinee della medesima, l'una dell'uno, l'altra dell'altro sistema;

c) Esistono e si sanno determinare due generatrici della superficie S, una per ciascun sistema, le quali fanno angolo retto coll' intersezione dei piani direttori del conoide: il punto in cui queste generatrici si tagliano è detto *vertice* della superficie, e la retta condotta pel vertice parallelamente ai due piani direttori chiamasi *asse* della superficie.

2. Rappresenti OX (fig. 1ª) l'asse, O il vertice del conoide S: le due generatrici del medesimo che si incontrano in O sieno OA, OB: HK ed FG sieno altre due generatrici di S, parallele al piano direttore BOX, le quali incontrino OA rispettivamente nei punti H ed F;

la proiezione ortogonale della prima delle dette generatrici sul piano BOA sia Hk. La retta che segna la minima distanza fra HK ed FG è perpendicolare al piano BOX, epperciò è contenuta nel piano che passa per HK ed è perpendicolare a BOX. Il detto piano ha per traccia sul piano BOA la retta HE perpendicolare abbassata da H sopra OB in un punto E di quest'ultima retta: il piano stesso inoltre contiene la generatrice di S che passa per E ed è parallela al piano AOX, la quale generatrice incontra HK nel punto M, la cui proiezione m sul piano BOA è l'intersezione di Hk con la parallela ad OA condotta per E. La minima distanza dunque fra HK ed FG si avrà conducendo dal punto N di intersezione di FG con EM una parallela ad EH fino ad incontrare in P la HK.

3. I punti N e P si proiettino sul piano BOA in n e p: la retta np sarà parallela e di lunghezza uguale ad NP. La distanza perciò di due generatrici qualunque HK, FG del conoide S ed appartenenti allo stesso sistema varia come FH, ossia come la distanza dei punti in cui esse tagliano la OA.

Inoltre il punto P, in cui la minima distanza NP fra HK ed FG incontra la HK, dista dal punto M sopra nominato, della lunghezza MP, la quale varia ancor essa come HF, e che tende perciò ad annullarsi a misura che la FG incontra OA in un punto più prossimo ad H.

4. Si sa che, se in una superficie sghemba si segna su ciascuna generatrice rettilinea il piede della comune perpendicolare ad essa ed alla generatrice infinitamente prossima, il luogo geometrico dei punti così determinati dicesi *linea di stringimento* della superficie.

Nel conoide S la linea di stringimento è adunque il luogo dei punti come M: ora le proiezioni di questi punti sono i vertici opposti ad O di parallelogrammi i quali, come $OHmE$, hanno due loro lati diretti secondo OA ed OB rispettivamente, ed inoltre una loro diagonale perpendicolare ad OB: i detti parallelogrammi sono perciò simili, similmente disposti, ed hanno per loro comune centro di similitudine il loro vertice comune O, epperciò la proiezione sul piano AOB del luogo dei punti come M, ossia della linea di stringimento del conoide S, è la retta Om, e la linea di stringimento stessa è una sezione fatta nel conoide S da un piano passante per l'asse della superficie.

5. Il piano della linea di stringimento del conoide S ora determinata divide per metà le corde di questa superficie che sono perpendicolari

al piano direttore BOX. Infatti ritenendo OX, OA, OB (fig. 1ª) per rappresentare l' asse e le due generatrici che passano pel vertice di S, sia Om la traccia del piano della sua linea di stringimento sul piano BOA, e P un punto qualunque della superficie conoide. Per P conducasi la generatrice di S parallela al piano BOX, e sia dessa HK la quale incontri OA in H e la linea di stringimento nel punto M avente m per sua proiezione ortogonale sul piano BOA. Condotta per M la generatrice ME del conoide che è parallela al piano AOX ed incontra OB in E, la retta mE risulta parallela ad OA, e la HE perpendicolare ad OB. Se ora da P si conduce PN parallela ad EH, essa è perpendicolare al piano BOX, ed incontra la EM in un punto N il quale appartiene perciò alla superficie S. Essendo EH diviso per metà dalla retta Om, la PN è pure divisa per metà dal piano XOm, il che è quanto volevasi dimostrare.

6. La linea di stringimento del conoide S ha un secondo ramo, che gode delle stesse proprietà di quello fin qui considerato, ed è il luogo geometrico dei piedi delle comuni perpendicolari a due generatrici consecutive del conoide S parallele al piano direttore AOX.

La determinazione del piano di questo secondo ramo risulta chiaramente da quanto si è detto: noteremo solamente ancora che, se i piani direttori di S fossero ortogonali fra loro, la linea di stringimento della superficie si ridurrebbe al sistema delle due rette OA, OB.

7. Consideriamo una generatrice qualunque EM (fig. 1ª) del conoide S parallela al piano direttore AOX: sia M il punto che la detta generatrice ha comune col ramo della linea di stringimento del conoide che corrisponde al piano direttore BOX, ed N un altro punto qualunque della stessa generatrice EM.

Condotte per M ed N le generatrici MH, NF del conoide S che sono parallele al piano BOX ed incontrano OA in H ed F rispettivamente, dico che l'angolo EMH è minore dell'angolo ENF.

Infatti, il piano HMm è perpendicolare ad EMH: la retta EM si proietta quindi sul piano MHm ortogonalmente secondo HM, mentre la proiezione ortogonale di NF sullo stesso piano è una retta che passa per P e non coincide con la detta HPM. L'angolo che fa la ora nominata proiezione di NF con ME è dunque maggiore dell'angolo EMH, e siccome FN è paralella al piano HMm, l'angolo EMH è minore di ENF.

Sussiste perciò il teorema seguente:

Fra gli angoli, che una generatrice rettilinea del conoide S fa con le differenti generatrici dello stesso conoide che appartengono al sistema opposto, è minimo quello il cui vertice cade sul ramo della linea di stringimento che corrisponde alle generatrici di questo sistema.

Si intende quivi per angolo di due generatrici il loro angolo acuto.

8. Il valore dell'angolo minimo che una generatrice della superficie S fa colle differenti generatrici del sistema opposto varia col variare la distanza di quella generatrice al piano direttore cui essa è parallela, e scema col crescere di quella distanza.

Così se $E'M'$ sia una generatrice rettilinea di S dello stesso sistema che la EM, ma meno distante di questa dal piano direttore AOX, il minimo degli angoli che la $E'M'$ fa colle generatrici di S che sono parallele al piano BOX è più grande del minimo degli angoli che fa EM colle dette generatrici parallele al piano BOX.

Infatti sieno MH ed $M'F$ le generatrici parallele al piano direttore BOX, le quali fanno angolo minimo rispettivamente con EM ed $E'M'$. Dai punti M ed M', i quali, come fu dimostrato, appartengono alla linea di stringimento del conoide, conduciamo Mm ed $M'm'$ parallele all'asse OX, e consideriamo i due triedri che hanno i vertici l'uno in M l'altro in M' e per spigoli rispettivamente ME, MH, Mm e $M'E'$, $M'F$, $M'm'$. Questi triedri hanno uguali i diedri MH, $M'F$ perchè retti, ed uguali ancora rispettivamente i diedri Mm, $M'm'$: d'altronde l'angolo piano EMm del primo di essi è manifestamente minore dell'angolo piano corrispondente $E'M'm'$ dell'altro: sarà dunque l'angolo EMH minore dell'angolo $E'M'F$, come volevasi provare.

Il valore dell'angolo minimo di cui si discorre varia dunque fra un massimo uguale a BOA, cui raggiunge quando EM si confonde con OA, e zero a cui sempre più si accosta a misura che EM più s' allontana dal piano AOX.

9. Con una facile costruzione si può determinare quella, fra le generatrici parallele al piano direttore AOX del conoide S, per la quale il minimo degli angoli da essa fatti colle generatrici dello stesso conoide parallele al piano BOX è uguale ad un angolo dato.

Prendasi infatti (fig. 1ª) il punto F arbitrariamente sulla generatrice OA, e tirisi da F la FE' perpendicolare in E' sopra l'altra generatrice OB che passa pel vertice O della superficie: sieno FM' la

generatrice parallela al piano BOX condotta per F, ed $E'M'$ la generatrice di sistema opposto alla precedente, e condotta per E': queste due generatrici si incontrino nel punto M' il quale abbia m' per sua proiezione ortogonale sul piano BOA. Sopra $E'F$ si costruisca nel piano BOA il triangolo $E'Fq$ rettangolo in F, ed il cui angolo in q uguaglia l'angolo dato. Nello stesso piano sopra Fm' si formino i triangoli $Fm'M_{\prime}$, $Fm'q'$ rettangoli in m', il primo dei quali abbia il cateto $M_{\prime}m'$ uguale ad $M'm'$, il secondo abbia l'ipotenusa Fq' uguale ad Fq.

Da q' si tiri $q'\nu$ parallela ad OB fino ad incontrare in ν la $FM_{\prime}$, e da ν si abbassi νn perpendicolare in n ad Fm'.

Condotta per n la retta En parallela ad OA, la quale incontra OB in E, essa è la proiezione ortogonale sul piano BOA della generatrice cercata.

Invero, Om' è la proiezione sul piano BOA del ramo della linea di stringimento del conoide S che corrisponde alle generatrici del medesimo parallele al piano BOX.

Sia m il punto d'incontro di En con Om', M il punto di S il quale si proietta ortogonalmente in m sul piano BOA, MH la generatrice del conoide che passa per M ed è parallela al piano BOX, la quale taglia OA nel punto H. L'angolo minimo fatto da EM colle differenti generatrici della superficie che appartengono al sistema opposto è uguale ad EMH, epperciò sarà dimostrato che è uguale all'angolo dato, se si fa vedere che i triangoli EHM, $E'Fq$ sono simili e che i lati EH, $E'F$ dei medesimi sono omologhi. Ora, se si faccia rotare il trapezio $Fq'\nu n$ attorno Fn finchè il suo piano diventi perpendicolare a BOA, e si faccia rotare il triangolo $E'qF$ attorno $E'F$ finchè il suo lato Fq venga a coincidere colla posizione presa dal lato Fq' del trapezio suddetto, il lato $E'q$ del triangolo $E'Fq$ si dispone parallelo al lato EM del triangolo EHM, e siccome i detti triangoli hanno inoltre paralleli fra loro i lati $E'F$, EH, e sono d'altronde rettangoli, essi sono simili, e l'angolo EMH uguale perciò all'angolo dato.

10. Data una generatrice del conoide S, il problema di trovare una generatrice del sistema opposto, la quale faccia colla data un angolo dato, si riduce alla risoluzione d'un angolo triedro, e quindi non vi ci fermiamo sopra.

Noteremo però che il luogo geometrico dei punti di S, pei quali

le generatrici che vi passano sono ortogonali fra loro, è una sezione fatta nella superficie da un piano perpendicolare al suo asse.

Infatti rappresentiamo ancora con O il vertice della superficie (fig. 2ª) con OA, OB le generatrici di essa che concorrono in O e con OX l'asse della medesima; sieno M ed N due punti della superficie le cui proiezioni ortogonali sul piano BOA cadono in m ed n.

Le generatrici ME, MF che passano per M taglino le OA, OB rispettivamente nei punti E ed F, e le generatrici NG, NH condotte per N incontrino rispettivamente le stesse OA, OB nei punti G ed H.

Tirate le EF, GH, i triangoli mEF, nGH, per essere l'angolo in m del primo uguale all'angolo in n del secondo, somministrano manifestamente l'uguaglianza

$$(1) \ldots\ldots \qquad \frac{\overline{EF}^2-\overline{mE}^2-\overline{mF}^2}{Fm \,.\, mE}=\frac{\overline{HG}^2-\overline{nH}^2-\overline{nG}^2}{Hn \,.\, nG} \,.$$

Sia P il punto di incontro di EM con HN, il quale si proietta nel punto p d'intersezione di Em con Hn: i triangoli simili HNn, HPp; PpE, MmE danno le proporzioni

$$Hn : Hp :: Nn : Pp$$
$$pE : mE :: Pp : Mm \,,$$

dalle quali ricavasi che è

$$\frac{Nn}{Mm}=\frac{Hn \,.\, pE}{Hp \,.\, mE}=\frac{Hn \,.\, nG}{Fm \,.\, mE} \,.$$

L'eguaglianza (1) può dunque scriversi nel modo seguente:

$$\frac{\overline{EF}^2-\overline{mE}^2-\overline{mF}^2}{Mm}=\frac{\overline{HG}^2-\overline{nH}^2-\overline{nG}^2}{Nn} \,,$$

od ancora

$$\frac{\overline{EF}^2-\overline{ME}^2-\overline{MF}^2+2\overline{Mm}^2}{Mm}=\frac{\overline{HG}^2-\overline{NH}^2-\overline{NG}^2+2\overline{Nn}^2}{Nn} \,,$$

o finalmente

$$\frac{\overline{EF}^2-\overline{ME}^2-\overline{MF}^2}{mM}+2Mm=\frac{\overline{HG}^2-\overline{NH}^2-\overline{NG}^2}{Nn}+2Nn \,.$$

Ora, se si suppone che gli angoli EMF, HNG sieno retti, dall'ultima forma che abbiamo dato alla uguaglianza precedente risulta,

che Mm è uguale ad Nn; supponendo invece che uno solo degli angoli savraccennato sia retto, e che si abbia inoltre $Mm = Nn$, risulta dall'uguaglianza stessa che l'altro degli angoli ora detti è pure retto.

Le sezioni fatte nel conoide S da un piano parallelo a due generatrici del medesimo essendo iperboli, i cui assintoti sono paralleli a queste generatrici, è facile il vedere che le proposizioni dimostrate in questo numero e nei tre precedenti si applicano alla risoluzione del problema di determinare un piano il quale tagli il conoide S secondo una iperbole data.

11. Riteniamo i dati e le notazioni della fig. 2ª, supponendo però che in essa i punti M ed N rappresentino due punti qualunque del conoide S.

Il piano EMF è tangente in M a questa superficie, ed il piano GNH lo tocca in N.

Chiamati μ e ν gli angoli che gli ora detti due piani fanno rispettivamente col piano BOA, dico che si avrà la proporzione seguente:

$$EF : \text{tang.}\,\mu :: GH : \text{tang.}\,\nu \ .$$

Difatti si abbassino dai punti m ed n le mr, ns perpendicolari la prima in r ad EF, la seconda in s a GH. Si ha manifestamente

$$mr \ \text{tang.}\,\mu = Mm \ ; \qquad ns \ \text{tang.}\,\nu = Nn \ :$$

e poichè fu dimostrato precedentemente, che la ragione di Mm ad Nn è uguale a quella di $Fm \, . \, mE$ ad $Hn \, . \, nG$, ossia a quella dei triangoli EmF, HnG, e questi triangoli hanno per loro altezze rispettivamente mr ed ns, le basi EF e GH dei triangoli stessi stanno fra loro come tang. μ a tang. ν.

12. Quando una superficie è illuminata da raggi paralleli fra loro, l'intensità dell'illuminazione in un punto qualunque di essa è proporzionale al seno dell'angolo che fa il piano tangente in quel punto alla superficie colla direzione dei raggi luminosi, e chiamansi linee di uguale illuminazione della superficie i luoghi geometrici dei punti della medesima, nei quali il piano tangente fa uno stesso angolo colla direzione della luce.

Se dunque si supponga il conoide S illuminato da raggi paralleli al suo asse, e che M ed N sieno due punti appartenenti ad una stessa linea di uguale illuminazione del conoide, dovrà essere $EF = GH$; e viceversa se è vera questa uguaglianza, i punti M ed N della superficie sono ugualmente illuminati.

Segue da ciò che le proiezioni sul piano BOA delle linee d'uguale illuminazione del conoide sono ellissi, aventi il centro in O, e gli assi diretti secondo le bissettrici degli angoli formati dalle rette OA, OB. Le lunghezze degli assi di una qualunque di queste ellissi, di quella, per esempio che passa pel punto m, si ottengono nel modo seguente.

Condotte da m le mE, mF rispettivamente parallele ad OB ed OA, si tiri la diagonale EF del parallelogramma $OEmF$. Si formino poi sopra OA ed OB, o sopra OA ed il prolungamento di OB come lati, due rombi, in ciascuno dei quali la diagonale che unisce i vertici adiacenti ad O sia lunga quanto EF; le altre diagonali di questi rombi, ossia le diagonali che partono dal loro vertice comune O, rappresentano non solo in posizione ma anche in grandezza i semiassi della ellisse di cui si tratta.

Il rapporto dei semiassi ora trovati è uguale al quadrato della cotangente della metà dell'angolo BOA: perciò le ellissi proiezioni sul piano BOA delle differenti linee d'uguale illuminazione del conoide S, oltre ad essere concentriche ed avere i loro assi rispettivamente coincidenti in direzione, sono tutte simili fra di loro.

13. Le ellissi predette si riducono a circonferenze concentriche in O quando i piani direttori del conoide sono ortogonali. Qualunque poi sia l'angolo formato dai piani direttori del conoide, la costruzione d'una qualunque delle ellissi sunnominate, di quella per esempio che passa pel punto m, è facilissima.

Infatti se si tira da m una parallela ad OA, e si considera il punto m_1 di essa, il quale dista quanto m dalla retta OB, la distanza di m_1 da O è eguale ad EF.

Facendo per ogni punto della proiezione della linea d'uguale illuminazione che passa per m una costruzione analoga a quella che si è fatta pel punto m, il luogo dei punti come m_1 è una circonferenza. E quindi per costrurre la proiezione suddetta basta descrivere dal centro O e con raggio uguale ad EF una circonferenza nel piano BOA, e condurre da ogni punto m_1 di questa circonferenza una parallela ad OA terminata in un punto m tale che m_1m sia divisa per metà da OB: il luogo dei punti m è l'ellisse a costruirsi.

Sia q_1 il punto della circonferenza sunnominata, nel quale la tangente ad essa circonferenza è parallela ad OA, la tangente alla ellisse della quale parliamo nel punto q di essa che corrisponde a q_1 è pure

parallela ad OA, epperciò Oq è il diametro della detta ellisse, che è coniugato del diametro cadente secondo OA: ora per essere qq_1 diviso per metà da OB, la retta Oq è la traccia sul piano BOA del piano del ramo della linea di stringimento del conoide S, che corrisponde alle generatrici del medesimo, che sono parallele al piano direttore AOX: similmente OB è, nella ellisse della quale si tratta, diametro coniugato di quello che è disposto secondo la retta proiezione sul piano BOA del ramo della linea di stringimento del conoide S, considerato come luogo delle sue generatrici parallele al piano BOX.

Estr. delle Memorie della Reale Accademia delle Scienze di Torino
Serie II. Tom. XXIV.